Prostornina igralne luknje pod stopnicami na OŠ Frana Albrehta Kamnik

Matematika ali logika

OŠ Frana Albrehta Kamnik

Avtorice: Mia Drobež, Karolina Kuhar, Zara Škrlj

Mentorica: Tjaša Gašpar

Kamnik, 2026

ZAHVALA

Najprej se zahvaljujemo mentorici Tjaši Gašpar, ki nas je vseskozi vodila in nam pomagala. Njeni nasveti so nam zelo pomagali.

Zahvala gre tudi univ. dipl. inž. arh. Primožu Hočevarju in mag. inž. arh. Tinetu Brincu iz Ateljeja Hočevar za odgovore na vprašanja, ki smo jima jih zastavile.

Posebno se zahvaljujemo dr. Gašperju Štebetu iz Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani za laserske meritve, ki so nam pri raziskovanju in računanju zelo pomagale.

Hvaležne smo tudi nekaterim učencem osmega in devetega razred, ki so rešili našo anketo o prostornini luknje pod stopnicami.

Zahvaljujemo se računalničarki Sari Zalesnik, ki je natisnila 3D modela luknje.

Za jezikovni pregled se zahvaljujemo učiteljici slovenščine Ireni Kotnik.

KAZALO

KAZALO SLIK

KAZALO TABEL

Prostornina igralne luknje pod stopnicami na OŠ Frana Albrehta - *povzetek*

V šolskem letu 2024 smo se učenci OŠ Frana Albrehta Kamnik vselili v popolnoma novo moderno šolo. V raziskovalni nalogi smo na različne načine določile prostornino igralne luknje pod stopnicami na novi šoli.

Najprej smo z anketo med učenci pridobile njihove ocene prostornine; povprečna ocena je bila 16 m³. Nato smo izmerile obseg zgornjega in spodnjega dela ter globino luknje. Njeno obliko smo aproksimirale z različnimi geometrijskimi telesi in ugotovile, da najnatančnejši rezultat dobimo, če jo obravnavamo kot prisekan stožec. Izračunale smo, da prostornina meri 15,2 m³.

Za določitev referenčne vrednosti prostornine smo uporabile meritve 3D laserskega merjenja, ki je pokazalo prostornino 15,3 m³. To vrednost smo v nadaljevanju upoštevale kot referenčno in izračunale odstopanja posameznih uporabljenih metod.

S 3D tiskalnikom smo natisnile dva pomanjšana modela luknje. S pretakanjem vode smo izmerile prostornini obeh modelov ter določile odstopanje od referenčne vrednosti.

Določile smo tudi strošek za nakup plastičnih žogic, s katerimi bi lahko napolnili igralno luknjo.

Ključne besede: prostornina, igralna luknja, geometrijska aproksimacija, 3D laserski merilnik

The volume of the play hole under the stairs at Fran Albreht Elementary School - *abstract*

In our research project, we calculated the volume of the play hole under the stairs at Fran Albreht Kamnik Primary School. The main aim was to determine its volume as accurately as possible using various methods and to compare the accuracy of each method.

First, we conducted a survey among the students to obtain their estimates of the volume; the average estimate was 16 m³. We then measured the circumference of the upper and lower parts and the depth of the hole. We approximated its shape with various geometric solids and found that the most accurate result was obtained by treating it as a truncated cone. We calculated the volume to be 15,21 m³.

To determine the reference value for the volume, we used 3D laser scanning, which showed a volume of 15.3 m³. We then used this value as a reference and calculated the deviations of the individual methods used.

We printed two scaled-down models of the hole using a 3D printer. We measured the volumes of both models by pouring water into them and determined the deviation from the reference value.

We also determined the cost of purchasing plastic balls to fill the playing hole.

Keywords: volume, playing hole, geometric approximation, 3D laser scanner

UVOD

Prvi šolski dan leta 2024 so učenci Osnovne šole Frana Albrehta Kamnik vstopili v popolnoma novo šolo. "Z vidika zasnove prostorov in opreme je popolnoma prilagojena uporabi najsodobnejših pedagoških metod, uvršča pa se med šole z najboljšimi pogoji za učence v državi"[1]. Za učence je zagotovo najbolj zanimiva in navdihujoča igralna luknja pod stopnicami. V igralni luknji (še) ni plastičnih kroglic, ki bi se jih učenci zagotovo zelo razveselili. Vprašale smo se, koliko plastičnih kroglic bi sploh šlo v igralno luknjo in kolikšen bi bil strošek za njihov nakup. Zato smo se odločile raziskati, kolikšna je prostornina igralne luknje.

Določanja prostornine igralne luknje smo se lotile na različne načine. Najprej smo se obrnile na arhitekta nove šole, gospoda Primoža Hočevarja iz ateljeja Hočevar. Gospod nam je pomagal z nekaterimi podatki in načrtom luknje, vendar podatka o prostornini nismo dobile. Odločile smo se, da prostornino določimo tako, da obliko luknje aproksimiramo z geometrijskim telesom. Najprej smo poskusile s kroglo, vendar se nam ta približek ni zdel najboljši, saj nismo mogle narediti dovolj jasne ocene, kolikšen del krogle naj bi igralna luknja zavzemala. Nato smo predpostavile, da je luknja oblike prisekanega stožca. S pomočjo vrvice in laserja smo izmerile vse potrebne količine, ki smo jih potrebovale, da smo lahko izračunale prostornino luknje. Nato smo luknjo obravnavale tudi kot valj in še na takšen način določile prostornino. Zanimalo nas je, kako natančni so naši izračuni, zato smo raziskovale naprej, kako bi lahko še bolj zanesljivo oziroma čim bolj natančno določile prostornino luknje.

Na šolo smo povabile gospoda Gašperja Štebeta, asistenta s Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani, ki je meritve opravil z laserskim merilnikom. S to metodo smo dobile zelo natančno vrednost prostornine luknje pod stopnicami. Dobile smo tudi množico podatkov, ki nam je omogočila izdelavo 3D načrta luknje. S šolskim 3D tiskalnikom smo natisnile dva različno pomanjšana modela luknje, enega 50-krat in drugega 25-krat pomanjšanega. Modela smo napolnile z vodo in na takšen način določile prostornino modelov, s čimer smo nato dobile prostornino luknje. Zanimalo nas je, kolikšno napako pri meritvi prostornine s pretakanjem povzroči pomanjšava modela. Na koncu smo izračunale tudi okvirni strošek nakupa plastičnih žogic, ki bi jih potrebovali, da bi napolnili luknjo, ter pripravile okviren strošek nakupa žogic.

[1] V Kamniku odprli eno najmodernejših osnovnih šol v Sloveniji - siol.net

Slika 1: Igralna luknja pod stopnicami na OŠ Frana Albrehta

Raziskovalni cilj

Cilj naše raziskave je poiskati, na kakšen način lahko določimo prostornino luknje pod stopnicami na novo zgrajeni OŠ Frana Albrehta Kamnik. Rezultate, pridobljene na različne načine, nato primerjamo in določamo odstopanja.

Raziskovalna vprašanja

1. Kolikšna je prostornina igralne luknje pod stopnicami?
2. Na kakšen način bi lahko določili prostornino in kako zanesljiv bo rezultat?
3. Koliko plastičnih žogic bi lahko šlo v igralno luknjo in kolikšen strošek predstavlja takšen nakup?

Hipoteze

[1] Ocenimo, da je prostornina luknje pod stopnicami 16 m^3.

[2] Geometrijska aproksimacija omogoča dovolj natančno določitev prostornine luknje, če luknjo obravnavamo kot prisekan pokončen stožec.

[3] Geometrijska aproksimacija ne omogoča dovolj natančne določitve prostornine luknje, če luknjo obravnavamo kot valj.

[4] Pri manjšem 3D modelu luknje (pomanjšava 1 : 50) bo odstopanje od referenčne meritve večje kot pri večjem modelu (pomanjšava 1 : 25).

TEORETIČNI DEL

Prostornina

Prostornina ali volumen (oznaka V) je fizikalna količina, ki pove, koliko prostora zaseda neko telo. Prostornino lahko določamo s prelivanjem vode, uporabo merilnih valjev, izpodrivanjem tekočine (Arhimedov zakon) ali z uporabo geometrijskih obrazcev pri pravilnih telesih. Način merjenja je odvisen od tega, ali merimo tekočino, trdnino ali plin. Pri trdninah je pomembna oblika telesa; če ima telo pravilno obliko, uporabimo formule za izračun prostornine, v nasprotnem primeru predmet položimo v merilni valj z vodo in odčitamo, za koliko se je gladina vode dvignila. Če je predmet votel, lahko vanj nalijemo vodo in izmerimo prostornino nalite vode. Osnovna enota je m^3 (kubični meter)[2].

Obseg kroga

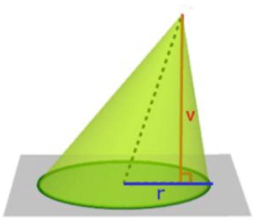
Obseg kroga je dolžina krožnice, ki omejuje krog. Količnik med obsegom kroga in dolžino premera je število π. Obseg kroga izračunamo z obrazcem: $o = d\pi$ ali $o = 2\pi r$, pri čemer je z *d* označen premer kroga, z *r* pa polmer[3].

Stožec

Stožec je okroglo geometrijsko telo z dvema mejnima ploskvama. Osnovna ploskev stožca je krog, ukrivljena mejna ploskev (krožni izsek) pa je plašč stožca[4].

Poševni stožec

Stožec je poševen, če njegova os ni pravokotna na osnovno ploskev[5].



Slika 2: Poševni stožec, vir slike: https://eucbeniki.sio.si/vega3/339/povzetekk_stozec2.png

Prostornina stožca

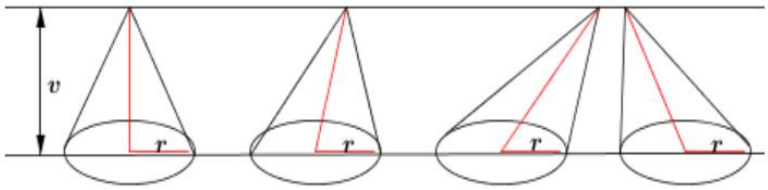
Prostornino stožca izračunamo z obrazcem $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$, pri čemer je *r* polmer osnovne ploskve, *v* pa višina stožca. Prostornina stožca je odvisna od velikosti osnovne ploskve in višine stožca, zato je prostornina poševnega in pokončnega stožca enaka, če imata enako osnovno ploskev in višino[3].

---

[2] Prostornina - Wikipedija, prosta enciklopedija
[3] https://eucbeniki.sio.si/mat8/838/index2.html
[4] https://si.openprof.com/wb/sto%C5%BEec?ch=138
[5] https://eucbeniki.sio.si/vega3/339/index4.html

Prostornina poševnega stožca

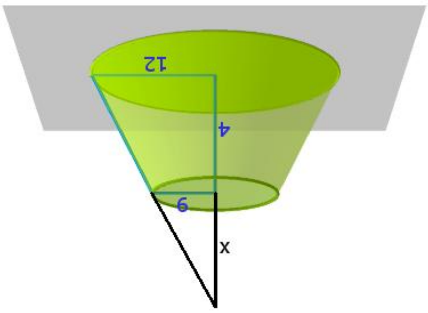
Iz slike je razvidno, da je višina vseh stožcev enaka. Vsi stožci imajo tudi enako dolžino polmera, zato je tudi velikost osnovne ploskve vseh stožcev enaka (glej spodnjo sliko). Ker je prostornina stožca odvisna od velikosti osnovne ploskve in višine stožca, lahko trdimo, da so prostornine stožcev na sliki enake. Tudi prostornino poševnega stožca lahko izračunamo po formuli $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$, ki je enaka formuli za izračun prostornine pokončnega stožca[3].



Slika 3: Primerjava višine pri poševnem stožcu in pokončnim stožcem, vir slike:
https://eucbeniki.sio.si/mat9/923/stozci.png

Prisekan stožec

Če stožec presekamo z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi, ta razpade na dva dela: zgornji (odrezani, odsekani) del je manjši stožec, spodnji del imenujemo prisekan stožec[6].



Prisekan stožec je obrnjen tako, ker ponazarja dejansko postavitev luknje.

Slika 4: Prisekan stožec, vir slike:
https://eucbeniki.sio.si/vega3/340/prisekani_stozec_slika_1_pomoccc.png

Prostornina prisekanega stožca je enaka razliki prostornin celotnega stožca in odrezanega stožca.

Valj

Valj je oglato geometrijsko telo, ki je omejeno z dvema osnovnima ploskvama in plaščem[7]. Prostornino valja izračunamo z obrazcem $V = S_O \cdot v = \pi r^2 \cdot v$. S_O je osnovna ploskev, ki je enaka ploščini kroga πr^2.

[6] https://eucbeniki.sio.si/vega3/339/index4.html
[7] https://eucbeniki.sio.si/vega3/335/index3.html

Podobnostni koeficient

Razmerje istoležečih stranic med sliko in originalom podobnih likov imenujemo podobnostni koeficient[8] k. Če z a označimo dolžino stranice originala in z a' dolžino stranice podobnega lika, potem velja: $a' : a = k$. Velja tudi, da sta obsega podobnih likov v enakem razmerju kot enakoležni stranici: $o' : o = k$. Za ploščini podobnih likov pa velja $p' : p = k^2$.

Pri podobnih telesih pa za prostornino velja $V' : V = k^3$. Če kocki z robom a rob dvakrat povečamo, $a' = 2a$, se prostornina kocke 8-krat poveča.

$V = a^3$

$V' = a'^3$

$V' = (2a)^3$

$V' = 8a^3 = 8V$

3D lasersko merjenje

3D lasersko merjenje (skeniranje) je brezkontaktna metoda merjenja, namenjena zajemu natančnih geometrijskih podatkov zahtevnih in težko dostopnih površin. 3D merilnik samodejno izmeri vse vidne dele objekta, zbrani podatki pa se z računalniško obdelavo pretvorijo v 3D modele, 2D načrte ali podatkovne zbirke, prilagojene potrebam uporabnika.

Gre za "zamrznitev" objekta v določenem trenutku in pretvorbo tega stanja v digitalno obliko. Tako lahko uporabnik vstopi v digitalni model ter pridobi natančne prostorske in vizualne informacije.

Ta postopek lahko uporabimo za volumetrijo (merjenje prostornine) in topografske meritve, izdelavo digitalnih modelov, pripravo 3D modelov, preverjanje ali izvedba gradnje ustreza načrtu ipd.

Poleg tega je 3D lasersko merjenje izjemno natančno in hitro, zajame celoten spekter podatkov in je varno. Uporabljajo ga arhitekti, gradben podjetja, geodeti ipd.[9]

[8] https://eucbeniki.sio.si/mat9/903/index2.html
[9] https://share.google/zx9PSJDfeoW2pfMz4

RAZISKOVALNI DEL

Poizvedba pri arhitektu

Pred merjenjem in računanjem smo na arhitekta nove Osnovne Šole Frana Albrehta, gospoda Primoža Hočevarja iz Ateljeja Hočevar naslovile nekaj vprašanj. Želele smo izvedeti, kako so nameravali narediti luknjo, saj smo same opazile, da ni pravilne oblike. Zanimalo nas je tudi, kakšne so mere luknje, kar bi nam olajšalo delo, vendar nam je arhitekt sporočil, da dejanske mere odstopajo od načrtovanih. Povpraševale smo tudi o obliki luknje, in sicer, ali se razlikuje od načrtovane in zakaj je takšne oblike. Vprašale smo tudi o izbiri materiala za izdelavo, saj je na spodnjih robovih luknje vidno, da izbrani material – les – ni omogočil popolnoma krive oblike, kot je bilo morda predvideno. Odgovore nam je podal mag. inž. arh. Tine Brinc. Ti nam pri dejanskem merjenju in izračunavanju niso veliko pomagali, smo pa izvedele nekaj zanimivih stvari o zasnovi luknje.

1. Zakaj ste se odločili, da boste v novo šolo vključili luknjo pod stopnicami pri učilnicah prve triade? Ste kaj podobnega že kje videli?

Da smo dodatno izkoristili prostor pod tribunami, ki bi bil zaradi višine sicer neuporaben. Seveda pa smo želeli dodati tudi nekaj zabavnega učencem nižjih razredov. Nismo prvi, ki smo na ta način skušali izkoristiti prostor pod stopnicami, res pa je, da tega ni veliko, vsaj ne po slovenskih šolah.

2. Kakšna je bila načrtovana oblika spodnjega dela luknje in kako se dejanska izvedba razlikuje? (Izmerile smo, da dno luknje ni okroglo. Ali je bilo tako načrtovano in zakaj?)

Dno je bilo načrtovano okrogle oblike, tudi zgornji radiji so bili geometrijsko skonstruirani v računalniškem programu. Tako je bilo načrtovano zato, da bi bila izvedba čim enostavnejša. Dejstvo je, da sama izvedba na gradbišču ne more biti tako natančna kot načrt. Delavci so morali oblikovati luknjo tako, da so najprej pripravili podlago iz betona, nato so na beton prilepili lesen parket in ga pobrusili. Izvedba je potekala v treh fazah in v vsaki je prišlo do manjše ali večje napake. Verjetno zato na dnu ni geometrijsko pravilen krog.

3. Zakaj so nakloni luknje na vsaki strani različni?

Zato, da so različni pogoji, načini uporabe: naslon, drča, za Beyblade, divjanje, skakanje, ležanje…

4. Katere kriterije ste upoštevali pri izbiri materiala za luknjo?

Da je mehansko odporen, topel in prijeten – kar les je.

5. Kako ste si vi predstavljali uporabo tega dela šole?

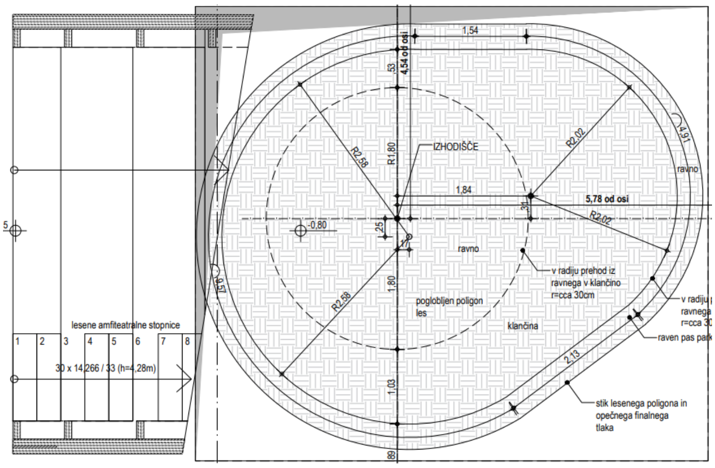
Tako kot opisano v točki 3. Vsekakor pa je prepuščeno tudi domišljiji učencev, ki so, verjamem, našli še druge načine uporabe.

6. Ali imate morda idejo, kako bi izračunale prostornino luknje?

To je vaša naloga ;). Lahko pa luknjo napolnite z vodo in zapisujete, koliko litrov ste natočile vanjo – predvidevam, da ta metoda ne bo všeč učiteljici :).

7. Imate mogoče podatke o merah luknje? (Globina, premer, nakloni …)

Natančnih podatkov nimam, ker je dejanska izvedba odstopala od načrtov. V prilogi pošiljam načrt luknje, in sicer tloris z vsemi podatki: radiji, globinami in ostalimi dimenzijami.



Slika 5: Načrt igralne luknje pod stopnicami

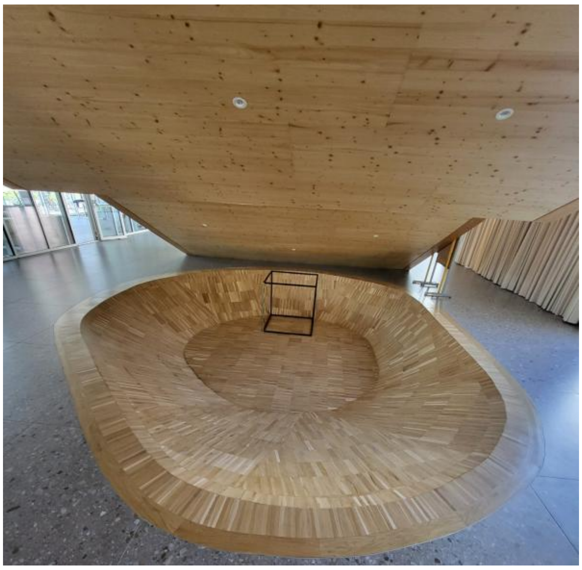
8. Se vam zdi, da je bila izdelava luknje zahteven projekt, tako zastavitev načrta kot tudi sama izvedba?

Sam načrt luknje ni zahteven – potrebna je dobra ideja, preblisk. Zahteven pa je celoten projekt šole, ki mora biti s podobnimi detajli zasnovan v prijetno, uporabno in zabavno celoto. Glede na pogovor z izvajalcem lahko potrdim, da je bila izvedba parketa zelo zahtevna predvsem zaradi različnih naklonov, radijev in stikov različnih ravnin ter oblik. Parket je namreč sestavljen iz pravokotnih ploščic, luknja pa iz zaokroženih linij. Največji izziv je bil stik poševnin z ravnino na zgornjem nivoju, kjer je moral izvajalec parketa po občutku prilagajati vsako pravokotno deščico.

9. Bi kaj podobnega vključili v katerega od vaših prihodnjih projektov?

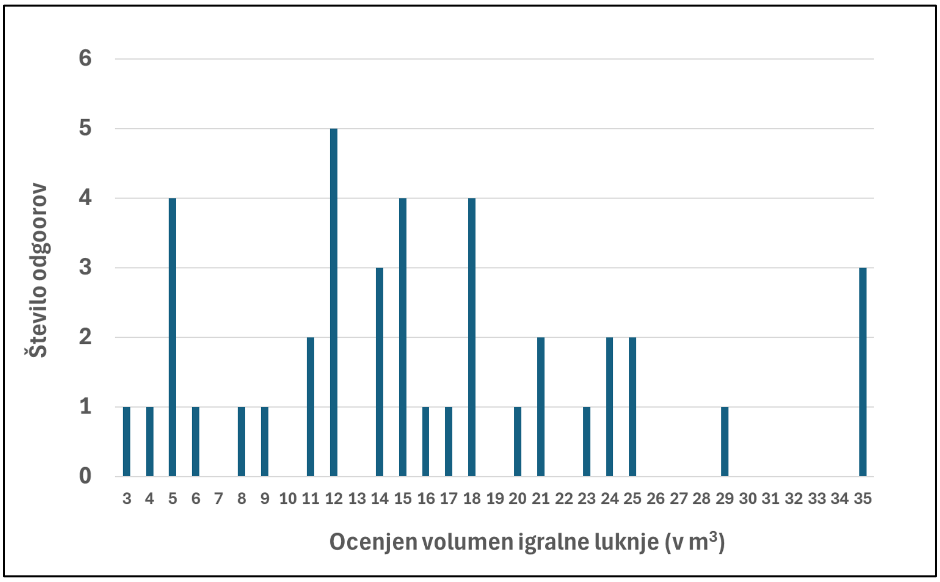
Smo že, vendar na drugačen način. Tokrat bo luknja oblazinjena in stopničasta in bo del knjižnice.

Ocena prostornine luknje



Slika 6: Kocka s prostornino 1 m^3 v igralni luknji

Najprej smo želele pridobiti neko oceno prostornine igralne luknje, zato smo pred kakršnikoli merjenjem v luknjo postavile kocko s prostornino 1 m³ (Slika 6), saj smo tako lažje naredile oceno. Ker same nismo imele enotne ocene prostornine luknje, smo se odločile, da bomo izvedle anketo med učenci in tako pridobile različne vrednosti. Prostornino luknje je ocenilo 41 učencev od 8. do 9. razreda. Ob prihodu k luknji so vzeli tablični računalnik in odgovorili na vprašalnik, ki smo ga pripravile. Izbirali so med odgovori od 3 m³ do 35 m³. Glede na njihove odgovore smo izračunale povprečno oceno prostornine luknje, ki znaša 16 m³. Mediana ocene je bila 15 m³, modus pa 12 m³. Ugotovile smo tudi, da je precej učencev prostornino luknje ocenilo z manjšim številom (torej, da je prostornina manjša). Ta podatek nas ni preveč presenetil, saj sama luknja ne deluje, da ima tako veliko prostornino.



Slika 7: Ocene učencev za velikost prostornine luknje

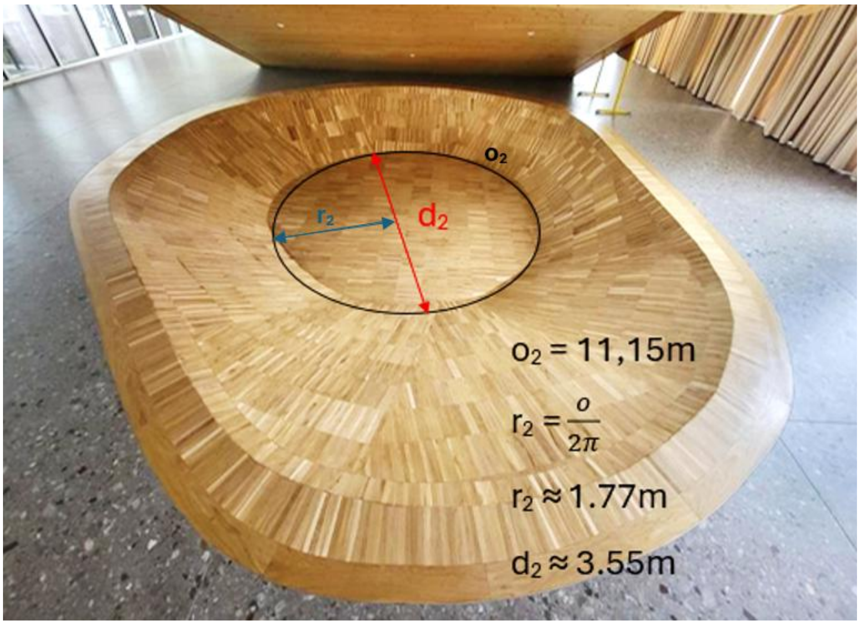
Meritve

Z neraztegljivo vrvico izmerimo obseg zgornje elipse *(o_1)* in obseg spodnje elipse (o_2) ter globino luknje (v_x).

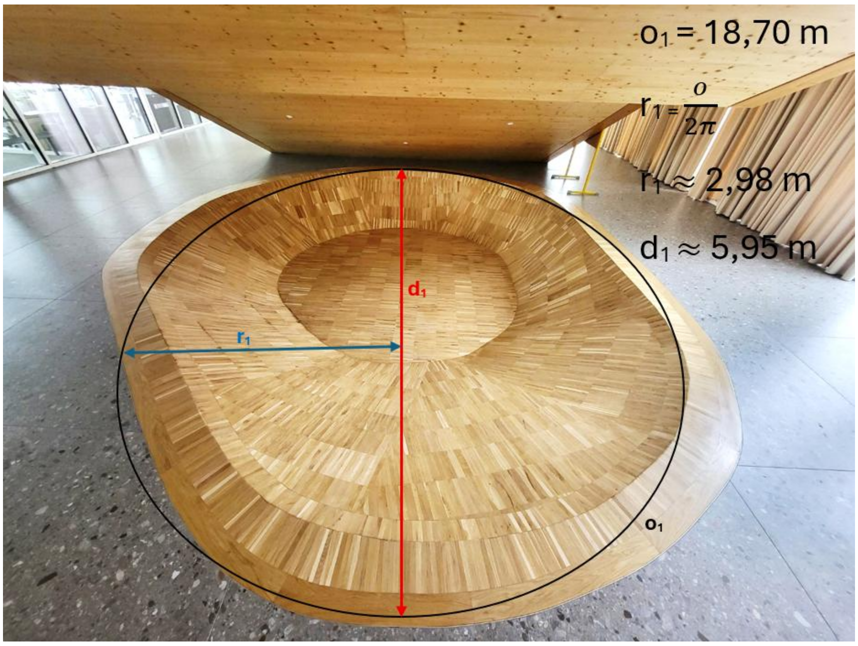
Tabela 4: Izmerjene vrednosti

Obseg 1	Obseg 2	Globina v_x
18,7 m	**11,15 m**	**0,84 m**

Zanemarimo elipsasto obliko in predpostavimo, da gre za krožnico. Iz obrazca za obseg izračunamo zgornji polmer r_1 in spodnji polmer r_2.



Slika 8: Elipsasto dno aproksimiramo s krogom



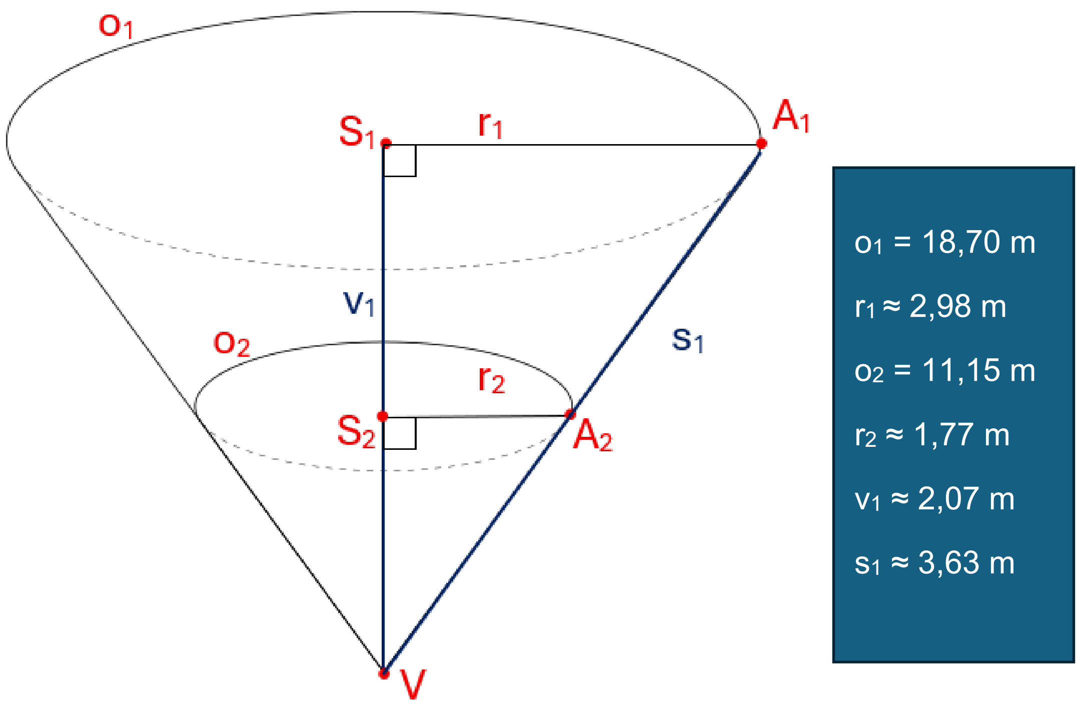
Slika 9: Elipsasti vrh aproksimiramo s krogom

Aproksimacija luknje s prisekanim stožcem

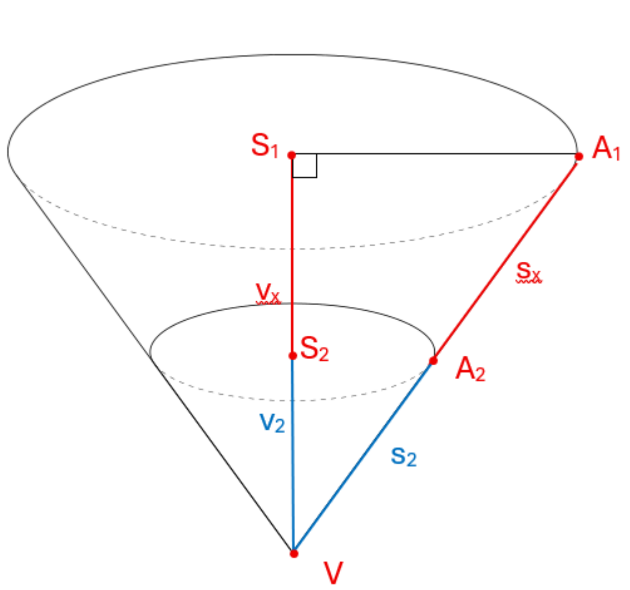
Skica igralne luknje in pomembni podatki za izračune

Na slikah 10 in 11 sta narisani skici, kako lahko luknjo aproksimiramo s (prisekanim) stožcem. Opazimo, da gre za poševni stožec, vendar to zanemarimo in ga obravnavamo kot pokončnega.

S točko S_1 označimo središče osnovne ploskve stožca, s točko S_2 pa središče kroga, ki ga dobimo, če stožec prisekamo z ravnino, vzporedno osnovni ploskvi. S točko V označimo vrh stožca. V modrem okvirčku so zbrani podatki, pridobljeni z merjenjem in računanjem (poglavje Meritve), pri čemer je z o_1 označen obseg, z r_1 pa polmer osnovne ploskve stožca. Z r_2 in o_2 sta označena polmer in obseg kroga, ki ju dobimo, če stožec prisekamo z ravnino, ki je vzporedna osnovni ploskvi. Z v_x je označena globina luknje (razdalja med točkama S_1 in S_2), ki smo jo izmerile. Z v_1 je označena razdalja med točkama S_1 in V in ponazarja višino stožca. Z v_2 je označena razdalja med točkama S_2 in V.



Slika 10: Skica luknje, vir slike: https://tex.stackexchange.com/questions/528534/how-to-draw-a-cone-with-two-regions-separated



v_x = 0,84 m

v_2 ≈ 1,23 m

s_x ≈ 1,47 m

s_2 ≈ 2,16 m

$$|S_1S_2| = v_x$$

$$|S_1V| = v_1 = v_x + v_2$$

$$|S_2V| = v_2$$

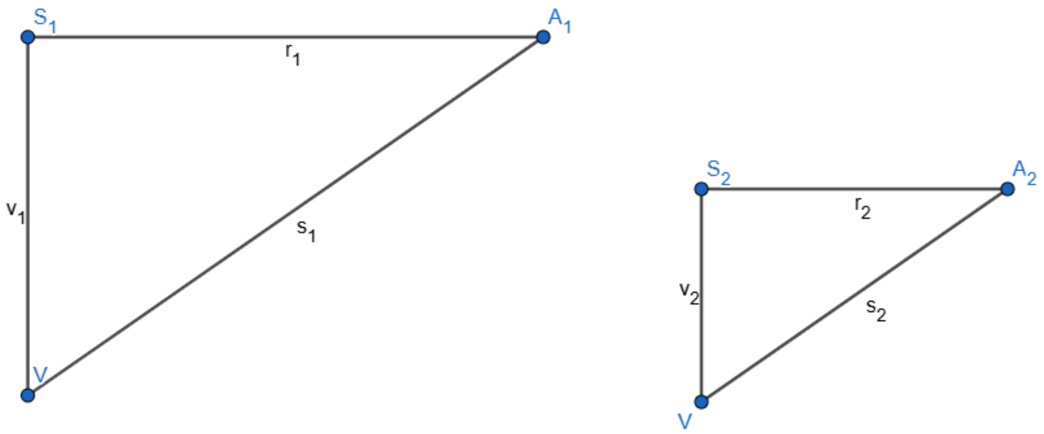
Slika 11: Skica vmesnih višin in naklonov luknje, vir slike: [*https://tex.stackexchange.com/questions/528534/how-to-draw-a-cone-with-two-regions-separated*](https://tex.stackexchange.com/questions/528534/how-to-draw-a-cone-with-two-regions-separated)

Meritve za izračun prostornine stožca

Oblika luknje pod stopnicami spominja na prisekan stožec. Za določitev prostornine prisekanega stožca potrebujem sledeče podatke: obseg zgornjega (o_1) in spodnjega dela (o_2) luknje ter višino oziroma globino luknje (v_x).

Izračun višine stožca

Če stožec prisekamo z ravnino, ki je pravokotna na osnovno ploskev in poteka skozi točko V, dobimo trikotnik S_1VA_1. Ta trikotnik je podoben trikotniku S_2VA_2, zato je razmerje enakoležnih stranic enako.



Slika 12: Podobna trikotnika, vir slike: [*https://www.geogebra.org/calculator*](https://www.geogebra.org/calculator)

Trikotnika S_1A_1V in S_2A_2V sta podobna, imata enako razmerje istoležnih stranic in lahko zapišemo:

$$r_1 : r_2 = \boldsymbol{v_1} : v_2$$

$$\boxed{v_1 = x + v_2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\boldsymbol{v_x + v_2}}{v_2}$$

$$r_1 \cdot v_2 = r_2(v_x + v_2)$$

$$r_1 \cdot v_2 = r_2 \cdot v_x + r_2 \cdot v_2$$

$$r_1 \cdot \boldsymbol{v_2} - r_2 \cdot \boldsymbol{v_2} = r_2 \cdot v_x$$

$$\boldsymbol{v_2} \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot v_x$$

$$\boldsymbol{v_2} = \frac{r_2 \cdot v_x}{r_1 - r_2}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \frac{1{,}77\ m \cdot 0{,}84\ m}{2{,}98\ m - 1{,}77\ m} = 1{,}23\ m$$

$$\boldsymbol{v_1} = v_x + v_2 = 0{,}84\ m + 1{,}23\ m = 2{,}07\ m$$

S pomočjo spodnjega postopka smo med računanjem s_1 in s_2 dokazale, da so vse stranice v enakem sorazmerju.

Preverimo sorazmerje:

$$r_1 : r_2 = v_1 : v_2 = s_1 : s_1$$

$$2{,}98m : 1{,}77m = (x + v_2) : \left(\frac{r_2 \cdot x}{r_1 - r_2}\right) = ((v_1)^2 + (r_1)^2) : ((v_2)^2 + (r_2)^2)$$

$$2{,}98m : 1{,}77m = (x + v_2) : 1{,}23m = 3{,}36m : ((v_2)^2 + (r_2)^2)$$

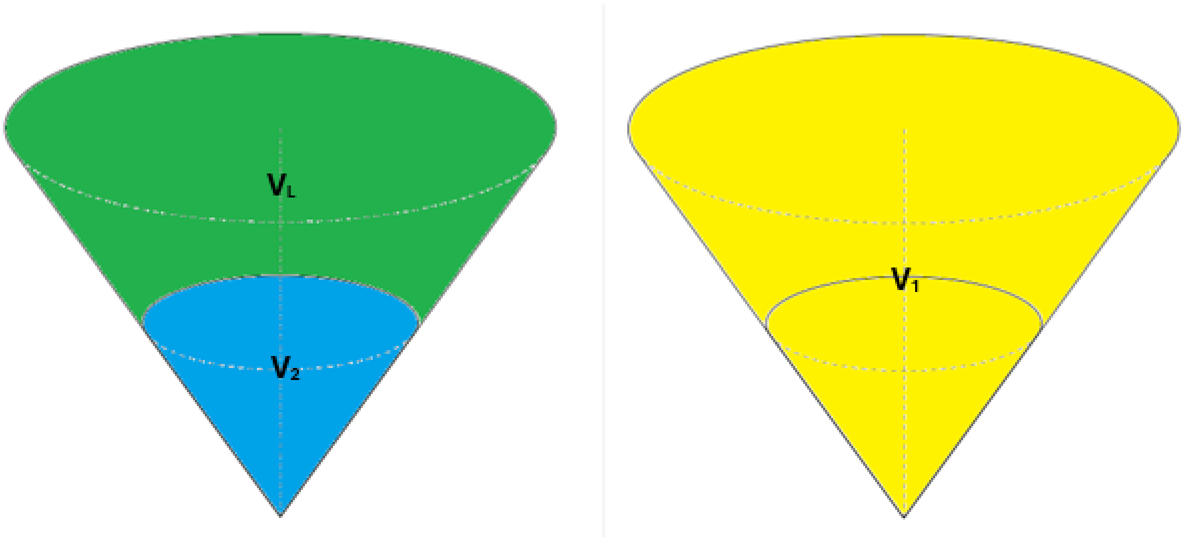
$$2{,}98m : 1{,}77m = 2{,}07m : 1{,}23m = 3{,}63m : 2{,}16m$$

$$1{,}68 = 1{,}68 = 1{,}68$$

Prostornina stožca

Obrazec za izračun prostornine stožca je $V = \frac{Ov}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}$.

Za izračun prostornine luknje moramo izračunati prostornino prisekanega stožca, ki je enaka prostornini luknje. Z V_1 označimo prostornino celotnega stožca (Na sliki 13 ponazorjeno z rumeno barvo), z V_2 pa prostornino manjšega, odsekanega dela (Na sliki 13 ponazorjeno z modro barvo). Prostornino luknje V_L (Na sliki 13 ponazorjeno z zeleno barvo) dobimo tako, da od prostornine celotnega stožca odštejemo prostornino odsekanega dela.



Slika 13: Ponazoritev prostornine luknje (V_L), vir slike: https://tex.stackexchange.com/questions/528534/how-to-draw-a-cone-with-two-regions-separated

$$V_L = V_1 - V_2$$

$$V_L = \frac{\pi r_1^2 v_1}{3} - \frac{\pi r_2^2 v_2}{3}$$

$$V_L = \frac{\pi}{3}(r_1^2 v_1 - r_2^2 v_2)$$

$$V_L = \frac{\pi}{3}(8{,}8804 \cdot 2{,}07 - 3{,}1329 \cdot 1{,}23)$$

$$V_L = \frac{\pi}{3}(18{,}382428 - 3{,}853467)$$

$$V_L = \frac{\pi}{3} 14{,}528961 m^3$$

$$V_L = 15{,}21469238\, m^3 \approx 15{,}21\, m^3$$

Aproksimacija luknje z valjem

Luknja ima, prav tako kot valj, dve navidezni ploskvi. Za valj velja, da sta osnovni ploskvi skladni in vzporedni. Ker naša luknja nima okrogle oblike, smo jo aproksimirale enako, kot smo to že storile v računanju z aproksimacijo stožca. Sedaj imamo za osnovno ploskev dva različno velika kroga. Predpostavimo, da sta zgornji in spodnji krog enako velika. Vzamemo oba polmera (polmer zgornjega in spodnjega kroga) in izračunamo povprečje.

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{2{,}98 + 1{,}77}{2} = 2{,}375\ m$$

Z V_L označimo prostornino luknje, z V_V označimo prostornino valja in z r označimo povprečen polmer zgornje in spodnje ploskve luknje. Višino izmerimo, $v_x = 0{,}84\ m$.

$$V_L = V_V = \pi r^2 \cdot v$$

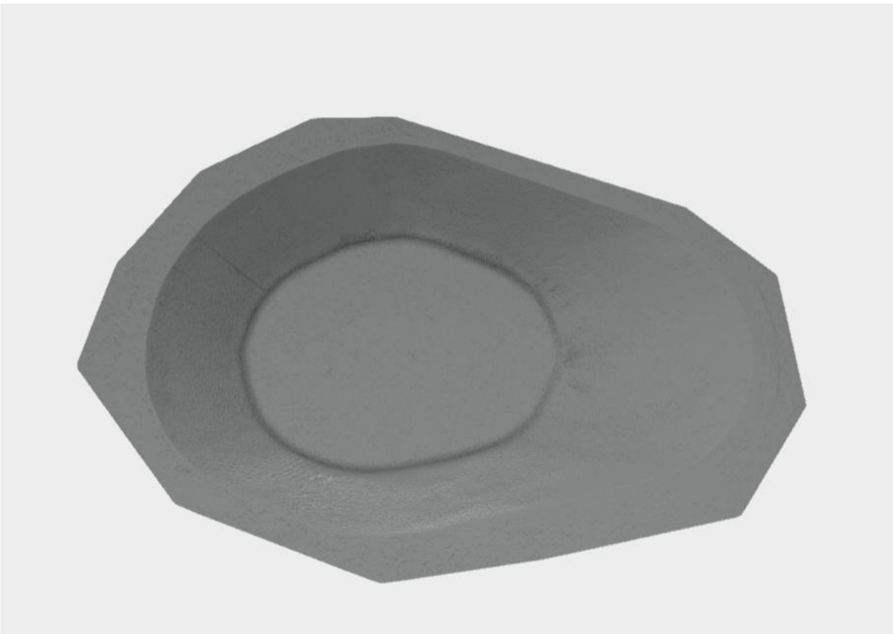
$$V_L = \ \pi \cdot 2{,}375^2 \cdot 0{,}84$$

$$V_L = 14{,}8852586918 m^3 \approx 14{,}89\ m^3$$

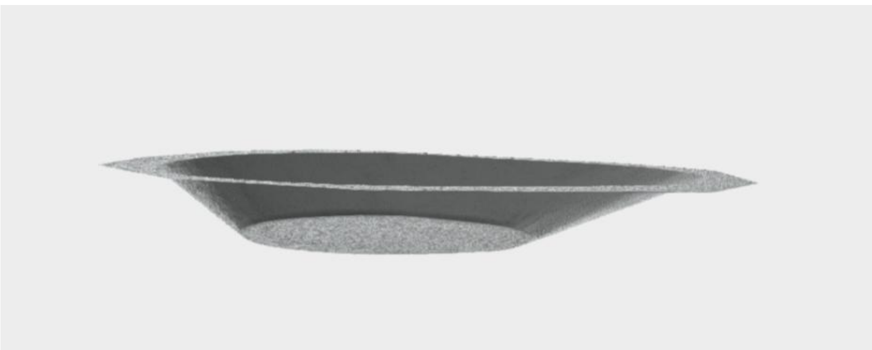
Merjenje s 3D laserskim merilnikom *Leica BLK360*

Raziskovale smo, kako bi lahko še bolj natančno izmerile prostornino luknje. Prišle smo na idejo, da lahko geodeti s pomočjo laserskega merilnika merijo in določajo oblike ter prostornino nepravilnih teles (npr. kupa zemlje). Obrnile smo se na zaposlene na fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Meritev na šoli je opravil dipl. geodet Gašper Štebe. Pri izmeri je uporabil 3D laserski merilnik Leica BLK360 (Slika 14), ki z oddajanjem laserskih žarkov in merjenjem časa povratka izračuna prostorske koordinate točk. Merjenje (skeniranje) je potekalo z enega stojišča, rezultat pa je bil oblak več kot dveh milijonov točk, ki natančno opisuje obliko luknje. Izmerjena prostornina je 15,3 m^3. Izdelan je bil tudi načrt za izdelavo 3D modela (Sliki 15 in 16), na katerem so vidni podatki o globini, višini in širini luknje.

Slika 14: 3D laserski merilnik Leica BLK36



Slika 15: Pogled 3D modela luknje s tlorisa

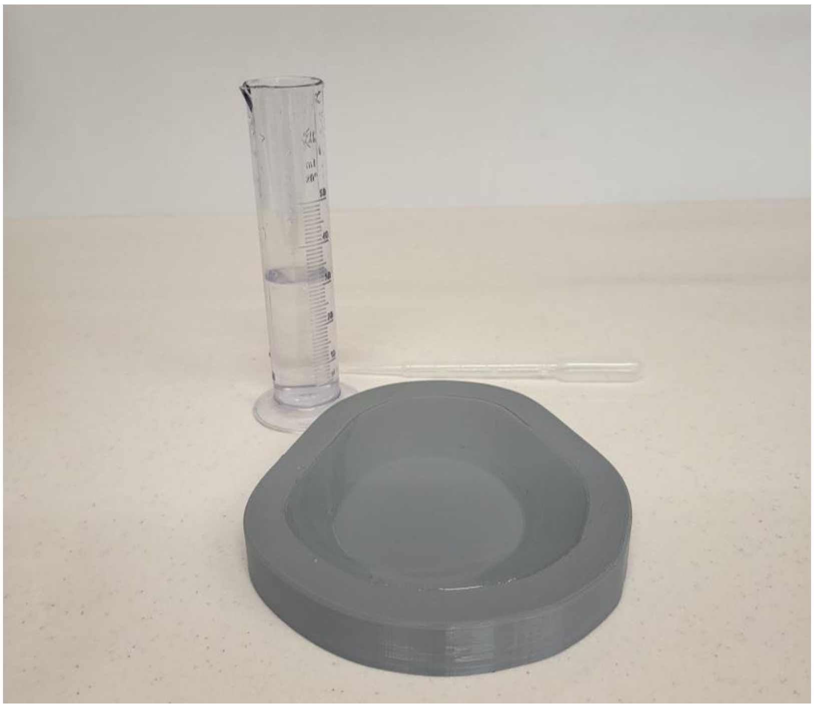


Slika 16: Pogled 3D modela luknje, stranski pogled

Izdelava 3D modelov luknje različnih velikosti

Z uporabo podatkov meritve z laserskim merilnikom smo s 3-D tiskalnikom izdelale pomanjšana modela lukenj v razmerjih 1 : 50 in 1 : 25. Z merilnim valjem smo v modelček dolivale vodo (Sliki 17 in 18). V preglednici (*Tabela 2*) smo zbrale meritve, koliko mililitrov vode smo nalile v model. Meritev smo ponovile petkrat za vsak model. Za določitev prostornine modela vzamemo aritmetično sredino vseh meritev.

Slika 17: Pripomočki za prelivanje vode, 3D modela luknje (pomanjšave 1 : 25 in 1 : 50)



Slika 18: Prelivanje vode, manjši model – 1 : 50

Tabela 25: Vrednosti meritev prostornine 3D modelov luknje

	1 : 50	1 : 25
Meritev 1 [mL]	115	890
Meritev 2 [mL]	125	900
Meritev 3 [mL]	124	920
Meritev 4 [mL]	125	910
Meritev 5 [mL]	124	930
Izmerjena povprečna vrednost [mL]	**122,6**	**910**

Referenčna vrednost prostornine 3D-modelov luknje

Če model 50-krat pomanjšamo, se njegova prostornina 50 · 50 · 50 = 125000 – krat pomanjša, če pa model 25-krat pomanjšamo, pa se njegova prostornina 25 · 25 ·25 = 15625 – krat pomanjša. Glede na referenčno meritev $(15{,}3\ m^3 = 15\ 300\ L)$ preračunamo, da naj bi bili prostornini modelov $122{,}4\ mL$ in $979{,}2\ mL$.

$$15300\ L : 50^3 = 0{,}1224\ L = 122{,}4\ mL$$

$$15300\ L : 25^3 = 0{,}9792\ L = 979{,}2\ mL$$

Tabela 36: Odstopanje prostornin pomanjšanih 3D modelov od referenčne prostornine

Model	Izmerjena vrednost [mL]	Referenčna vrednost [mL]	Odstopanje [%]
1 : 50	122,6	122,4	0,16 %
1 : 25	910	979,2	7,07 %

Strošek nakupa plastičnih žogic

Igralno luknjo bi lahko napolnili s plastičnimi žogicami. Polmer plastične žogice (oblika krogle) označimo z *r*. Z V_1 označimo prostornino ene žogice, z V_v pa prostornino vseh žogic. Prostornino žogice izračunamo z obrazcem

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3,$$

število vseh žogic pa dobimo tako, da prostornino luknje delimo s prostornino ene žogice

$$V_v = V_L : V_1.$$

Prostornino zraka med žogicami tokrat zanemarimo.

Na spletu poiščemo ceno in velikost žogic pri različnih ponudnikih. V spletni trgovini Bima[10]. prodajajo 100 žogic s polmerom 3 cm za 13,50 €, v spletni trgovini Minipini[11] pa ponujajo 50 žogic s polmerom 3,5 cm za 10,00 €. Rezultate zberemo v *Tabeli 4*.

Tabela 4: Izračun okvirnega stroška nakupa žogic pri dveh ponudnikih

Spletna trgovina	Prostornina 1 žogice [m^3]	Število žogic, da napolnimo luknjo	Okvirna cena nakupa
Bima	0,000113097	135 282	18 265,50 €
Minipini	0,000179594	85 192	17 040 €

[10] https://bima-shop.si/zogice-igralnice-100-1-v-mrezici-izdelek-42494/
[11] https://minipini.si/kategorija-izdelka/igra-in-zabava/plasticne-zogice/

RAZPRAVA

V raziskovalni nalogi smo raziskovale prostornino igralne luknje pod stopnicami na Osnovni šoli Frana Albrehta Kamnik. V teoretičnem delu smo predstavile načine določanja prostornine teles, zlasti z uporabo geometrijskih obrazcev za pravilna telesa ter metode merjenja prostornine pri nepravilnih oblikah. Teoretična izhodišča pravijo, da lahko prostornino nepravilnega telesa dovolj natančno ocenimo z ustrezno geometrijsko aproksimacijo ali z natančnimi merilnimi postopki. Naše ugotovitve to potrjujejo.

Prostornino smo določile na več različnih načinov:

- z oceno učencev,
- z geometrijsko aproksimacijo prisekanega stožca,
- z geometrijsko aproksimacijo valja in
- z meritvijo s 3D laserskim merilnikom.

Meritev s 3D laserskim merilnikom smo uporabile za referenčno meritev (15,3 m^3) in ta rezultat primerjale z ostalimi meritvami ter določile odstopanja. Najbolj natančen geometrijski približek je bil model prisekanega stožca, medtem ko je bil model valja manj natančen, saj se po obliki precej razlikuje od oblike luknje (predvidevamo, da je vzrok precej različna velikost osnovnih ploskev). Ocena učencev (16 m^3) se je presenetljivo dobro približala dejanski vrednosti. Menimo, da je k temu pripomogla tudi kocka s prostornino 1 m^3, ki smo jo postavile v igralno luknjo. S 3D tiskalnikom smo izdelale dva pomanjšana modela luknje. Ugotovile smo, da pomanjšava 3D modela vpliva na natančnost meritev, saj pri večjem modelu (1 : 25) pride do večjih odstopanj, kar nas je presenetilo, saj smo pričakovale, da bi bilo zaradi večje pomanjšave pri manjšem modelu (1 : 50) odstopanje večje. Do velikega odstopanja pri večjem modelu je verjetno prišlo tudi zaradi možnih napak pri 3D tiskanju. Poleg velikosti je močno vplivala tudi površinska napetost, ki nastane zaradi privlačnosti med molekulami vode. Rezultati so predstavljeni v *Tabeli 3.*

Na koncu nas je zanimalo, koliko žogic bi potrebovali, da bi napolnili luknjo. Kot dve možnosti nakupa smo uporabile igralne žogice iz dveh različnih spletnih trgovin in ugotovile, da bi se bolj splačalo, če bi žogice kupili v spletni trgovini Minipini. Nakup bi bil precej cenejši, in sicer kar za 1 225,50 €.

Tabela 5: Odstopanje prostornin izračunanih na različne načine od referenčne prostornine 7

	Prostornina	Odstopanje od referenčne prostornine v % (15,3 m^3)	Odstopanje od referenčne prostornine v m^3 (15,3 m^3)
Ocena učencev	16 m^3	4,38 %	0,7
Aproksimacija s stožcem	15,21 m^3	0,59 %	0,09
Aproksimacija z valjem	14,89 m^3	2,68 %	0,41
3D model v razmerju 1 : 25	14,22 m^3	7,07 %	1,08
3D model v razmerju 1 : 50	15,32 m^3	0,16 %	0,02

Ovržba ali potrditev hipotez – glede na naše izračune.

[1] Ocenimo, da je prostornina luknje pod stopnicami 16 m^3.

Prostornina, izmerjena s 3D laserskim merilnikom, je 15,3 m^3. Odstopanje znaša 4,38 %, kar pomeni, da je ocena dokaj natančna. Hipotezo potrdimo.

[2] Geometrijska aproksimacija omogoča dovolj natančno določitev prostornine luknje, če luknjo obravnavamo kot prisekan pokončen stožec.

Ko smo luknjo obravnavale kot prisekan pokončen stožec, smo dobile rezultat 15,21 m^3, ki od laserske meritve odstopa le 0,59 %. To pomeni, da je metoda zelo natančna, zato hipotezo potrdimo.

[3] Geometrijska aproksimacija ne omogoča dovolj natančne določitve prostornine luknje, če luknjo obravnavamo kot valj.

Ko smo luknjo obravnavale kot valj, dobimo rezultat 14,89 m^3. Ta rezultat od laserske meritve odstopa le 2,68 %. Ker je to precej natančen rezultat, hipotezo zavržemo. Aproksimacija z valjem torej omogoča dovolj natančno določitev prostornine luknje.

[4] Pri manjšem 3D modelu luknje (1 : 50) bo odstopanje od referenčne meritve večje kot pri večjem modelu (1 : 25).

Pri meritvi s pomanjšanim modelom 1 : 25 se je pojavilo večje odstopanje (7,07 %). To kaže, da pomanjšava vpliva na natančnost. Poleg tega smo ugotovile, da na rezultat vpliva tudi površinska napetost vode in možnost napake pri samem 3D tiskanju. V nasprotju z modelom 1 : 25 pa je bilo pri modelu 1 : 50 odstopanje zelo majhno, le 0,16 %. Hipotezo zavržemo, saj se je pri modelu 1 : 25 pojavilo večje odstopanje od referenčne meritve kot pri modelu 1 : 50.

ZAKLJUČEK

Igralna luknja pod stopnicami zaradi več dejavnikov nima pravilne geometrijske oblike, zato smo jo aproksimirale z različnimi geometrijskimi telesi. Ugotovile smo, da je model prisekanega stožca najbolj natančna aproksimacija oblike luknje, ker je odstopanje referenčne prostornine najmanjše. Kljub precej majhnemu odstopanju pa je aproksimacija z valjem manj natančna. Uporabile smo tudi metodo z laserskim merilnikom, ki nam omogoča zelo natančno določanje prostornin nepravilnih geometrijskih teles, kar nam je pomagalo pri določanju odstopanja ostalih rezultatov in smo ta rezultat določile kot referenčen. Na raziskovalno vprašanje, kako določiti prostornino in kolikšna je prostornina, smo poiskale več metod in za najbolj natančno določile lasersko merjenje.

Raziskava je pokazala, da je mogoče prostornino nepravilnih oblik dovolj natančno določiti z ustrezno geometrijsko aproksimacijo, še natančnejše rezultate pa dobimo z uporabo sodobnih merilnih tehnologij, kot je 3D lasersko merjenje. Pridobljeno znanje je zelo uporabno v vsakdanjem življenju, saj moramo pogosto izmeriti in izračunati prostornino teles nepravilnih geometrijskih oblik. Natisnjeni 3D modeli pomanjšane luknje bodo lahko uporabljeni tudi v izobraževalne namene. Na dnevu dejavnosti bodo učenci s prelivanjem vode določali prostornino modelov in preračunali prostornino igralne luknje.

Uporabljeno znanje lahko prenesemo na podobne probleme za računanje prostornine teles.

Za nadaljnje raziskave bi lahko, ko bo luknja napolnjena z žogicami, določili še prostornino zraka med žogicami. Prav tako bi lahko izmerili in izračunali še površino luknje (npr. ko bo potrebna prenova in zamenjava parketa).

LITERATURA IN VIRI

1. *Podobnostni koeficient: I – učbenik.* (n. d.). E-učbeniki. Pridobljeno 20. februarja 2026 s https://eucbeniki.sio.si/mat9/903/index2.html.
2. *Prostornina valja: I – učbenik.* (n. d.). E-učbeniki. Pridobljeno 15. januarja 2026 s https://eucbeniki.sio.si/vega3/335/index3.html.
3. *Računanje obsega kroga: I – učbenik.* (n. d.). E-učbeniki. Pridobljeno 15. januarja 2026 s https://eucbeniki.sio.si/mat8/838/index2.html.
4. *Stožec.* (n. d.). OpenProf. Pridobljeno 15. januarja 2026 s https://si.openprof.com/wb/sto%C5%BEec?ch=138.
5. *V Kamniku odprli eno najmodernejših osnovnih šol v Sloveniji.* (2024). Siol.net. Pridobljeno 15. januarja s https://siol.net/novice/slovenija/v-kamniku-odprli-eno-najmodernejsih-osnovnih-sol-v-sloveniji-648284.

PRILOGE

Tehnično poročilo dr. Gašperja Štebeta (Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Univerze v Ljubljani), dostopno na: Izmera prostornine luknje na OŠ Frana Albrehta

Izmera prostornine
luknje na OŠ Frana A

IZJAVA

Izjavljamo, da smo pri pripravi raziskovalne naloge upoštevali etična načela in smernice v skladu z veljavnimi pravnimi akti raziskovalnega področja.

Podpisani:

Avtorji:

Mia Drobež Mia Drobež

Karolina Kuhar

Zara Škrlj Zara Škrlj

Mentorica:

Tjaša Gašpar Gašpar